Électromagnétisme – Chapitre 4

Équations de Maxwell et énergie électromagnétique – TD

Exercice 1 : Questions de cours

On considère un matériau conducteur présentant une densité volumique de charges $\rho(x,t)$ et un vecteur densité volumique de courants $\vec{j}(x,t)$, dont on suppose qu'ils ne dépendent que de la coordonnée x et du temps t.

1. Établir l'équation locale de conservation de la charge dans ce cas unidimensionnel à l'aide d'un bilan de charges.

On s'intéresse maintenant aux équations de Maxwell sous forme locale et intégrale.

2. Rappeler l'équation de Maxwell-Gauss sous forme locale, puis établir une forme intégrale de cette équation.

3. Rappeler l'équation de Maxwell-Faraday sous forme locale, puis établir une forme intégrale de cette équation.

4. Rappeler l'équation de Maxwell-Thomson sous forme locale, puis établir une forme intégrale de cette équation.

5. Rappeler l'équation de Maxwell-Ampère sous forme locale, puis établir une forme intégrale de cette équation.

Exercice 2 : Champ électromagnétique dans un espace

On considère un espace vide de charge et de courant, dans lequel règne un champ électromagnétique qui s'exprime :

$$\begin{cases} \overrightarrow{E} = f(z)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\vec{e}_x \\ \overrightarrow{B} = g(z)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\vec{e}_y \end{cases}$$

avec $f(z)$ et $g(z)$ des fonctions que l'on souhaite déterminer, et τ une constante positive.

1. Montrer que les équations de Maxwell imposent deux relations entre les fonctions $f(z)$ et $g(z)$.

2. En déduire une équation différentielle vérifiée par $f(z)$.

On suppose que $\overrightarrow{E}(z=0,t=0) = E_0\,\vec{e}_x$, avec E_0 une constante, et que le champ électrique s'annule lorsque $z \to +\infty$.

3. Déterminer l'expression du champ électrique en tout point de l'espace.

4. En déduire l'expression du champ magnétique en tout point de l'espace.

Exercice 3 : Énergie d'une distribution sphérique de charge

On considère une boule de rayon R centrée en O contenant une densité volumique de charge uniforme ρ.

1. Déterminer l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ en tout point de l'espace à l'aide du théorème de Gauss.

2. En déduire l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique $u(M)$ en tout point de l'espace.

3. Déterminer l'expression de l'énergie totale U_{tot} associée à cette distribution de charges.

Exercice 4 : Floculation d'une suspension colloïdale

Une suspension colloïdale est une solution aqueuse contenant des particules de petites tailles (de 10 nm à 1 µm) chargées négativement. La répulsion électrostatique entre ces particules engendre des vitesses de sédimentation très lentes. En ajoutant des sels ioniques à la suspension, on facilite l'agglomération des particules entre elles, ce qui permet d'accélérer la sédimentation, c'est le phénomène de floculation.

On considère une particule colloïdale sphérique, centrée en O, de rayon R et de charge $Q < 0$ dans une solution aqueuse. En ajoutant des sels ioniques dans la solution, on suppose que les densités volumiques

en cations n_+ (de charge $+z\,e$) et en anions n_- (de charge $-z\,e$) sont données par la loi de Boltzmann en coordonnées sphériques :

$$n_+(r) = n_0 \exp\left[-\frac{z\,e\,V(r)}{k_\mathrm{B}\,T}\right] \qquad \text{et} \qquad n_-(r) = n_0 \exp\left[+\frac{z\,e\,V(r)}{k_\mathrm{B}\,T}\right]$$

avec $k_\mathrm{B}\,T \gg |z\,e\,V(r)|$, où n_0 et z sont des constantes, e est la charge élémentaire, $V(r)$ est le potentiel électrostatique, et k_B est la constante de Boltzmann.

On rappelle que l'opérateur laplacien appliqué à une fonction $f(r)$ s'exprime en coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\,(r\,f)\,.$$

1. Exprimer la densité volumique de charge $\rho(r)$ autour de la particule colloïdale en développant au premier ordre en $\dfrac{z\,e\,V(r)}{k_\mathrm{B}\,T}$.

2. À l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss, montrer que le potentiel électrostatique vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\,[r\,V(r)] - \frac{2\,z^2\,e^2\,n_0\,V(r)}{\varepsilon_0\,k_\mathrm{B}\,T} = 0.$$

Pour résoudre cette équation différentielle, on définit la fonction : $u(r) = r\,V(r)$.

3. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par $u(r)$, puis en déduire que le potentiel peut s'exprimer sous la forme :

$$V(r) = \frac{A}{r}\,\mathrm{e}^{-r/\delta} + \frac{B}{r}\,\mathrm{e}^{r/\delta}$$

avec A et B des constantes, et δ une longueur que l'on exprimera.

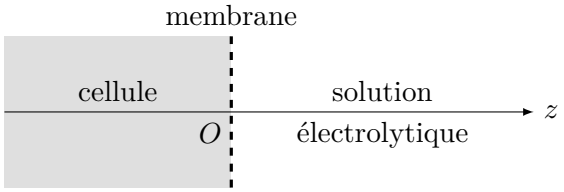
On suppose que le champ électrostatique est continu à la surface de la particule (en $r = R$), et qu'il est nul à grande distance (lorsque $r \to \infty$).

4. En déduire l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}(r)$.

5. Décrire l'effet de l'ajout d'ions sur le champ électrostatique créé par une particule colloïdale, puis expliquer pourquoi il permet le phénomène de floculation.

Exercice 5 : Charges à la surface d'une membrane cellulaire

On considère une membrane cellulaire qui sépare l'intérieur d'une cellule (occupant le demi-espace $z < 0$) d'une solution électrolytique (occupant le demi-espace $z > 0$).



Des mesures réalisées à l'aide d'une électrode montrent que le potentiel électrostatique peut s'exprimer de la forme :

$$V(z) = \begin{cases} -V_0 & \text{pour } z \leqslant 0 \\ -V_0\,\mathrm{e}^{-z/a} & \text{pour } z > 0 \end{cases}$$

avec V_0 et a des constantes positives.

1. Exprimer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(z)$ en tout point de l'espace.

2. En déduire la densité volumique de charge $\rho(z)$.

3. D'où provient cette distribution volumique de charge dans la solution électrolytique ?

4. À l'aide du théorème de Gauss, déterminer la densité surfacique de charge σ présente sur la surface de la membrane.